MATEMATICA ED EDUCAZIONE: IL RUOLO FONDAMENTALE DEI LINGUAGGI

Parte III

Requisiti di un quadro teorico

Gli esempi presentati illustrano un'ampia gamma di comportamenti linguistici che mettono in luce difficoltà specifiche con il linguaggio e diverse modalità di uso dello stesso. In questa sezione cerco di sintetizzare le questioni generali che sono messe in luce da questi comportamenti e difficoltà e di delineare le caratteristiche di un quadro teorico adeguato per interpretare i dati e individuare strategie didattiche vincenti.

Gli esempi hanno messo in luce difficoltà relative non solo a conoscenze e abilità linguistiche ma anche ad *atteggiamenti* nei confronti dei linguaggi (come negli esempi 4, 5, 6, 7), che possono essere collegati a *convinzioni* (e.g., "un problema va risolto usando la medesima notazione in cui è formulato il testo", "in matematica, fino a prova contraria, i linguaggi sono poco importanti", "i linguaggi non servono per comunicare", "i testi servono in quanto forniscono ricette", "per fare bene in matematica le competenze linguistiche non servono", "controllare i testi prodotti è inutile", …) oltre che a *emozioni* (un sistema simbolico, ad esempio, offre di solito emozioni piacevoli quando si riesce a controllarlo e a usarlo per i propri scopi, sgradevoli in caso contrario).

Fra quelli della sezione precedente, gli esempi 5, 8, 9 e 10 mostrano situazioni in cui salta agli occhi che gli studenti non si limitano a decodificare i testi ma, più o meno esplicitamente, più o meno appropriatamente, sviluppano *inferenze* e formulano ipotesi sui loro significati. Situazioni di questo tipo, che sono molto frequenti nella comunicazione scolastica, richiedono allo studente di sforzarsi di dare un senso ai testi che riceve anche nel caso in cui non ne afferri gli scopi o il significato complessivo. È necessario quindi guardare ai processi di interpretazione come processi attivi e cooperativi anche da parte del ricevente.

Dagli esempi emerge chiaramente che le difficoltà non riguardano le sole notazioni simboliche (come negli esempi 2, 3, 4, 6, 7) ma mettono in gioco anche la *componente figurale*[1] (come negli esempi 9, 10, 11) e, in modo particolare, quella *verbale* (come negli esempi 1, 5, 6, 8, 9, 10, 11). Quindi nel quadro teorico dovranno essere considerate tutte le componenti del linguaggio matematico: quella verbale, quella simbolica e quella figurale[2].

Alcuni esempi mettono in luce che le difficoltà non riguardano soltanto il lessico o la sintassi, ma anche l'organizzazione dei testi, le loro funzioni e la loro adeguatezza (come negli esempi 1, 5, 6, 8, 9, 11). Considerare le funzioni dei testi significa anche tener conto dei contesti (spazio, tempo, partecipanti, ruoli, scopi, …) in cui i testi sono prodotti o interpretati. Una classe ampia di difficoltà (dalle quali ha preso le mosse questa ricerca) riguarda il passaggio fra testi prodotti in conformità agli usi matematici e testi prodotti in base all'esigenza di comunicare e operare in altri contesti, come quello quotidiano. Molti degli esempi allegati mostrano che spesso gli studenti non si rendono conto del passaggio da un uso all'altro (ciascuno con i propri scopi e le proprie modalità espressive), e applicano modi espressivi tipici dello stile colloquiale in ambito matematico, con risultati insoddisfacenti. Il quadro teorico dovrà quindi essere in grado di individuare le differenze rilevanti fra i diversi tipi di uso del linguaggio. Bisogna infatti tener conto del fatto che la rappresentazione di idee matematiche, sistemate o in formazione, è praticata all'interno di comunità umane; i linguaggi devono quindi svolgere anche funzioni tipiche dell'interazione fra umani, ad esempio per intrattenere le relazioni interpersonali. Anche queste ultime funzioni divergono

[1] In questa presentazione preferisco usare 'figurale', in quanto 'visuale' e 'grafico' a rigore si riferiscono anche a testi scritti.

[2] È forse possibile individuare altre componenti, come quella gestuale. In questa presentazione verranno analizzate soprattutto le tre citate sopra.

abbastanza nettamente rispetto a quelle legate alla rappresentazione delle conoscenze matematiche e al trattamento. Questa divergenza di funzioni si manifesta continuamente nella pratica didattica, per cui usi e convenzioni adeguati rispetto alle esigenze matematiche (come chiamare 'rettangolo' un quadrato o affermare che 2 è minore o uguale di 1000), possono risultare inadeguati rispetto a quelle colloquiali.
Per questo mi sono servito di strumenti tipici della *pragmatica*, cioè della sottodisciplina della linguistica che studia le relazioni fra i sistemi linguistici e i loro usi. In particolare ho usato idee e costruzioni della *linguistica funzionale,* che è l'orientamento che considera le forme linguistiche prevalentemente alla luce delle funzioni che svolgono. L'idea di utilizzare idee della pragmatica per interpretare difficoltà relative al linguaggio matematico non è nuova. Rumain *et al.* (1983) hanno utilizzato, in modo convincente, l'idea di *schema conversazionale*, collegata alla teoria di Grice (1975) per spiegare gli errori nell'interpretazione di frasi condizionali. Idee analoghe sono state utilizzate, in diversi contesti, da Trognon (1997) e Jean Caron (1979, 1997)[3]. Anche Sfard (2000b) utilizza idee e costruzioni della pragmatica, come ad esempio l'analisi focale.
Inoltre, in educazione matematica è fondamentale non solo la rappresentazione di idee in quanto prodotti stabili e adeguatamente sistemati, ma anche quella di idee provvisorie, in formazione, come supporto al pensiero e ai processi di comunicazione. Come vedremo, queste due situazioni richiedono risorse linguistiche diverse, e quindi anche la consapevolezza metalinguistica per passare da un tipo di linguaggio all'altro.

Quadro teorico

Inizio con qualche chiarimento terminologico. La *semiotica* è la disciplina che studia tutti i sistemi di segni, quelli che sono lingue e quelli che non lo sono. La *linguistica* studia le lingue, cioè i sistemi semiotici umani, storicamente determinati, dotati di caratteristiche speciali[4]. La *pragmatica* è attualmente una sottodisciplina della semiotica e si occupa delle relazioni fra i sistemi di segni e i contesti nei quali vengono utilizzati (in particolare, i partecipanti). La *linguistica funzionale* (da qualcuno detta anche *sociolinguistica*) è invece un orientamento teorico, che verrà illustrato in una sezione specifica e che considera le *funzioni* dei linguaggi in una posizione privilegiata rispetto alle *forme*. La pragmatica è un'area disciplinare molto vasta, alla quale appartengono ad esempio studi di orientamento socioculturale ma anche studi di orientamento diverso, come ad esempio lavori di G.Lakoff e della sua scuola.

Pragmatica

I temi classici della pragmatica sono gli *indicali*[5], gli *atti linguistici*, la *cooperazione comunicativa* e le *implicature*. Si dà il caso che tutti questi temi siano collegati a punti critici della ricerca sull'apprendimento matematico. Mettere in luce tali collegamenti contribuisce a chiarire le differenze fra i linguaggi usati in matematica e il linguaggio quotidiano e costituisce una prima motivazione del mio interesse per la pragmatica.

Indicali

Il passaggio da un testo verbale a un equazione algebrica crea diverse difficoltà che sono state ampiamente studiate dalla ricerca sull'apprendimento matematico[6]. Fra i fenomeni *analgebrici* studiati da H.Bloedy-Vinner ve ne sono alcuni che dipendono dall'attribuire impropriamente funzioni di indicali (deittiche) alle lettere utilizzate nella messa in equazione. Vediamo un esempio

---

[3] Il volume edito da Bernicot *et al.* (1997) contiene diversi saggi sulle influenze degli schemi conversazionali nei processi di comunicazione e cognitivi.
[4] Per dettagli si veda il glossario alle voci *lingua* e *semiotica*.
[5] Gli *indicali* sono quelle espressioni (e.g., tu, quello, laggiù, ieri) la cui interpretazione richiede informazioni sul contesto (spazio, tempo, partecipanti) in cui il messaggio è stato prodotto. Il tipo di riferimento operato con gli indicali è detto *deittico*.
[6] Uno degli temi più discussi è il cosiddetto 'reversal error'. Per maggiori informazioni e riferimenti bibliografici si veda il lavoro di Pawley e Cooper (1997), che contiene una rassegna sul tema.

tratto dallo studio di Bloedy-Vinner (1996); la traduzione è mia. Il campione era costituito da studenti dei corsi di preparazione all'università. Agli studenti era richiesto di scrivere equazioni che traducessero il problema ma non di risolverle.

> **Problema 1**. Prima della partita Tal aveva il triplo delle bilie di Gadi. Durante la partita Tal ha perso metà delle sue bilie a favore di Gadi, e alla fine il numero delle bilie di Gadi supera di 12 il numero di bilie di Tal.

Le relazioni espresse (esplicitamente o implicitamente) dal problema sono:

(a) Prima della partita Tal aveva il triplo delle bilie di Gadi.
(b) Tal ha perso metà delle sue bilie.
(c) Gadi ha vinto metà delle bilie di Tal.
(d) Alla fine il numero delle bilie di Gadi supera di 12 il numero di bilie di Tal.

Tra i diversi comportamenti degni di nota (fra cui gli errori di inversione), l'autrice rileva anche il seguente:

> In 19 risposte si è rivelata una nuova forma di errore analgebrico: una lettera o un'espressione denotano il numero di bilie di un bambino, e sono pensate come se cambiassero con l'evoluzione della storia, senza eseguire alcuna operazione algebrica su di esse. Le stesse lettere sono usate per tradurre (a) e (d), mentre (b) e (c) sono pensate come se 'accadessero automaticamente', magari scrivendo le parole 'prima' e 'dopo' vicino alle equazioni.

Questo può essere spiegato in chiave linguistica osservando che negli quotidiani del linguaggio verbale gli indicali vengono aggiornati automaticamente al variare del contesto. Quindi un'espressione come 'il numero delle bilie di Tal' (che è un indicale in quanto la sua denotazione dipende dal tempo in cui è prodotta, oltre che da Tal) è adeguata a rappresentare il numero delle bilie possedute da Tal sia prima della partita (36) sia dopo la partita (18). L'espressione rimane invariata, ma la sua denotazione cambia. Lo stesso non accade per le lettere nel simbolismo algebrico. Se, per mettere in equazione la relazione iniziale del problema, 'il numero delle bilie di Tal' viene rappresentato da una lettera, supponiamo x, 'le bilie di Tal' alla fine della partita non può essere rappresentata da x, ma è necessario aggiornare 'manualmente' la rappresentazione e usare $\frac{x}{2}$.

Questa esigenza è determinata dalla semantica dei linguaggi del I ordine (quelli studiati dalla logica matematica, per i quali l'interpretazione di una lettera non dipende da parametri contestuali, come il tempo).

Per questo, il linguaggio algebrico è, a rigore, sprovvisto di indicali. L'uso informale di lettere può far ritenere impropriamente che una variabile abbia un funzionamento simile a quello di un indicale.

<u>Proposizioni e atti linguistici</u>

La distinzione fra *proposizione* e *atto linguistico* è dovuta ad Austin (1962) e prende le mosse dalla constatazione che esistono modi (come l'imperativo) ed espressioni verbali (come 'giuro', 'voglio', 'pagherò') che sono equivalenti ad azioni, piuttosto che a proposizioni vere o false. Questo vale anche per frasi dichiarative: una frase come "piove" a seconda delle circostanze può avere un significato molto vicino a "prendi l'ombrello". Austin definisce proposizione quell'aspetto del significato di una frase che consente di identificare i referenti e stabilire se la frase è vera o falsa. Un atto linguistico riguarda anche le frasi non dichiarative (interiezioni, ordini, domande, ...) e include il fatto di produrre proprio quella frase (o quel testo) in quelle circostanze; oltre a una proposizione può quindi esprimere atteggiamenti, convinzioni, impegni, azioni del parlante (*illocuzione*) o modificare atteggiamenti, convinzioni, comportamenti del ricevente (*perlocuzione*).

In matematica capita spesso che costruzioni definite come proposizioni si trovino a svolgere le funzioni di atti linguistici.

Ad esempio, nei corsi di Logica Matematica, ma anche in altri corsi di I anno e in molti libri di testo, il connettivo '$\Rightarrow$' viene usualmente introdotto così:

se A, B sono proposizioni allora $A \Rightarrow B$ è una proposizione che è vera nei casi in cui A è falsa oppure B è vera.

Così si è definita una proposizione (logici e linguisti usano lo stesso termine non casualmente). Ma quando il docente scrive alla lavagna '$A \Rightarrow B$' molto spesso non si limita a rappresentare una proposizione ma pratica un atto linguistico, con il quale esprime la propria convinzione che la proposizione '$A \Rightarrow B$' sia vera e che sia rilevante ai fini del ruolo istituzionale che sta svolgendo (illocuzione) e cerca di convincere gli studenti di tutto questo (perlocuzione). In altre parole, il suo scopo non è rappresentare un nuovo enunciato costruito a partire da A e B, ma esprimere (le sue convinzioni su) una relazione fra gli enunciati A e B[7].

Una proposizione come '$\neg A \vee B$', che è logicamente equivalente a '$A \Rightarrow B$', è spesso associata a un atto linguistico diverso (probabilmente con una minor forza illocutoria). Come già osservato da altri[8], questo fenomeno può essere rafforzato dal fatto che la traduzione verbale di '$\Rightarrow$' è spesso una forma verbale ('implica') anziché una congiunzione come accade ad altri connettivi. Questo spiega forse le difficoltà psicologiche (anche da parte di studenti più esperti) nell'accettare l'interpretazione di '$\Rightarrow$' in un'algebra di Boole del tipo $\mathcal{P}X$, con X insieme, molto maggiori rispetto a '$\neg$', '$\wedge$', o '$\vee$'[9].

Altro esempio: in molti testi di matematica è frequente trovare espressioni simboliche inserite all'interno di testi verbali con o senza virgolette. Consideriamo le frasi seguenti (tratte da un libro di teoria elementare dei numeri):

"Dati a, b, c interi, cerchiamo le soluzioni intere dell'equazione $ax+by=c$."

e, poche pagine oltre, dopo aver imposto condizioni su a, b, c e aver costruito la formula generale per trovare tutte le soluzioni a partire da una, si conclude la dimostrazione con la frase:

"… e quindi si ha $ax+by=c$".

Nella prima occorrenza la scrittura $ax+by=c$ è la rappresentazione neutrale di una proposizione, e il testo non prende posizione sulla sua verità, mentre nel secondo caso la scrittura assume il valore di atto linguistico, con illocuzione (l'autore del testo è convinto che, sotto le condizioni date, $ax+by$ sia davvero uguale a c) e perlocuzione (almeno nei confronti degli studenti che riesce a convincere). Nel primo caso '=' è citato come un simbolo di un linguaggio del I ordine, mentre nel secondo fa le veci di un verbo della lingua italiana. Va detto che, nonostante si tratti di un testo estremamente accurato, la drastica differenza di significati tra le due espressioni non è marcata se non dall'apposizione 'equazione' nella prima occorrenza.

In questi esempi la distinzione fra proposizione e atto linguistico è collegata a quella fra linguaggio e metalinguaggio. Se linguaggio e metalinguaggio sono tenuti separati, allora gli enunciati matematici (e.g., le formule dell'algebra) possono essere trattati come proposizioni lasciando ai commenti metalinguistici le funzioni di illocuzione e perlocuzione. Se invece si utilizza un solo piano linguistico, allora è inevitabile che gli enunciati matematici vengano caricati di aspetti non proposizionali.

Un altro esempio di comportamento abbastanza diffuso è il seguente.

Uno studente, richiesto di calcolare la derivata nell'origine della funzione f definita sui reali da

$$f(x) = \sin(x^2) - x$$

ha prodotto il seguente testo:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2) - 1 = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 = -1$$

[7] Le notazioni della logica matematica offrirebbero la possibilità di superare queste difficoltà attribuendo al metalinguaggio le funzioni illocutorie e perlocutorie. L'atto linguistico '$A \Rightarrow B$' potrebbe essere espresso, ad esempio, dall'asserzione metalinguistica '$\models A \Rightarrow B$' ("la formula '$A \Rightarrow B$' è logicamente valida"). Con questo non intendo prendere posizione sull'opportunità didattica di una scelta del genere.

[8] Sono certo di aver letto un'osservazione del genere in un lavoro di Villani ma non sono riuscito a ritrovare quale.

[9] Se A, $B \subseteq X$, '$A \Rightarrow B$' denota l'unione del complementare di A con B.

È evidente che lo studente avrebbe potuto eliminare da subito il primo addendo (in cui compare un fattore nullo), ma non lo ha fatto, probabilmente per documentare il suo processo di calcolo. Se avesse scritto direttamente $f'(0) = -1$, avrebbe prodotto una formula equivalente alla precedente in quanto *proposizione*, ma differente in quanto *atto linguistico*, in quanto comunica diverse intenzioni da parte dello scrivente e raggiunge effetti diversi nel lettore[10].

Un approccio pragmatico consente di superare alcuni annosi problemi di interpretazione dei connettivi logici. È noto che molti soggetti resistono a un'interpretazione vero-funzionale di enunciati condizionali, del tipo "Se *A* allora *B*"[11]. Diversi ricercatori hanno proposto ipotesi per spiegare questo fenomeno. La spiegazione per cui i soggetti interpretano "Se *A* allora *B*" come se fosse "*A* se e solo se *B*" ha goduto di una certa popolarità in passato. A mio giudizio è inutile tentare di interpretare in termini vero-funzionali enunciati che vengono trattati come atti linguistici. Il rifiuto di molti soggetti verso enunciati del tipo "Se *A* allora *B*" con *A* contraddittorio, o in assenza di legami semantici riconoscibili fra *A* e *B* non vuole essere tanto un'affermazione della loro falsità quanto l'espressione di dubbi (legittimi, dal punto di vista del linguaggio quotidiano) sull'adeguatezza degli atti linguistici associati a tali enunciati. A questo proposito è illuminante l'interpretazione di Rumain *et al.* (1983) gia citata in precedenza, che attribuisce le anomalie nell'interpretazione di frasi condizionali all'applicazione di *schemi conversazionali*, cioè di modelli di interazione verbale regolati in base al Principio di Cooperazione di Grice (1975), discusso nel prossimo punto.

Cooperazione

In questo quadro si assume che i testi vengono interpretati non solo scomponendo i testi in base alle regole della grammatica e applicando poi le proprie conoscenze lessicali (i suo *dizionario*) ma anche sviluppando *inferenze* con cui il ricevente si sforza di esplicitare le informazioni implicite nel testo, utilizzando le sue conoscenze (l'*enciclopedia*)[12], ma anche le sue convinzioni, sull'emittente, sull'argomento del messaggio, sul contesto in cui è stato prodotto e facendosi influenzare dalle emozioni che il testo gli suscita. Vediamo come esempio un brano tratto da un libro di matematica[13], riportato testualmente.

> Un numero naturale n può essere espresso in una base $\beta>1$, $\beta\in\mathbb{N}$, nella forma
>
> $$n = c_k\beta^k + c_{k-1}\beta^{k-1} + \dots + c_1 b + c_0,$$
>
> dove c_i sono interi compresi fra 0 e $\beta-1$, l'indice i sta ad indicare la posizione (la rappresentazione sarà unica se supponiamo $c_k\neq 0$). La base usualmente adottata è la base $\beta=10$ e le cifre c_i, $i = 0, \dots, k$ sono dette cifre decimali. I numeri naturali possono essere rappresentati geometricamente come punti su una retta. A tale scopo si fissa un punto O sulla retta, che associeremo al numero 0, e un secondo punto P diverso da O che associeremo al valore 1. Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P, mentre la lunghezza del segmento OP, che indicheremo con $\overline{OP}$, viene presa come unità di misura. Riportando i "multipli" del segmento OP sulla retta, secondo il verso positivo, otteniamo i numeri naturali.

I lettori hanno molto lavoro da fare per interpretare questo testo, come per gran parte dei testi. È possibile che la scrittura simbolica della seconda riga (non preceduta da alcun esempio) susciti in loro emozioni diverse, in molti casi negative. Come molti altri testi matematici, questo è pieno di

---

[10] Questo uso della notazione simbolica può essere spiegato anche in base alla distinzione tra senso e denotazione, come discussa da Arzarello (1994) o Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994, 1995). Le espressioni citate hanno la stessa denotazione (il numero -1) ma evidentemente sensi diversi. L'utilizzo di tale distinzione non è evidentemente incompatibile con l'impostazione di questo lavoro, ma rientra in pieno negli schemi interpretativi della pragmatica (come ad esempio, la IV massima del Principio di Cooperazione di Grice).

[11] Questo è un tema ampiamente discusso in letteratura, dai lavori classici di O'Brien *et al.*(1971) al recente lavoro di Hoyles & Küchemann (2002).

[12] A questo proposito si veda Eco (1984). Lo stesso autore ha prodotto diversi studi sulla cooperazione interpretativa nei testi narrativi, come ad esempio (1979).

[13] Il brano è tratto da Naldi *et al.* (2003, p.5). La scelta del testo è del tutto casuale. In generale, tutte le citazioni di libri matematici sono introdotte al solo scopo di esemplificare stili linguistici. La critica dei contenuti dei libri esula dagli scopi di questo seminario.

passaggi la cui comprensione richiede qualche ragionamento o l'applicazione di schemi basati sull'esperienza. Si pensi ad esempio a passaggi come "... in una base $\beta>1$, $\beta\in\mathbb{N}$ ..." o "... è la base $\beta=10$ e le cifre c_i, $i = 0, ..., k$ sono ..." dove occorre capire, ad esempio, che la base è β, non "$\beta>1$" o "$\beta\in\mathbb{N}$", e dove la scrittura "c_i, $i = 0, ..., k$" potrebbe creare serî ostacoli a un non matematico.
Inoltre, inevitabilmente, non tutto è espresso in forma esplicita: ad esempio non è scritto da nessuna parte che P sta sulla stessa retta in cui c'è già O.
I lettori potrebbero poi avere dubbi sulla rilevanza di alcune frasi, come ad esempio, "Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P ..." la cui funzione si rivela soltanto nella frase finale.
Anche le ragioni per cui si introduce la notazione $\overline{OP}$ non sono immediatamente evidenti.

Una lettura troppo superficiale potrebbe non cogliere la differenza fra $\overline{OP}$ e OP.

Una lettura troppo puntigliosa (poco cooperativa!) potrebbe suggerire che la scrittura "La base usualmente adottata è la base $\beta=10$" non precisa quale sia la base.
La situazione è quindi la seguente: le notazioni simboliche della matematica sono interpretabili attraverso grammatica e dizionario[14] e in linea di principio, non dovrebbero richiedere molte inferenze; d'altra parte, nella pratica didattica, come in tutti i consorzi umani, qualunque testo, anche simbolico, è destinato a interagire col contesto, e in particolare a innescare inferenze; inoltre, la produzione di testi assolutamente privi di ambiguità è illusoria; per tutte queste ragioni è opportuno guardare ai processi di comunicazione in matematica come processi attivi e cooperativi, anche per quanto riguarda la componente simbolica.
Anche se siamo abituati a parlare di ambiguità come se fosse una proprietà assoluta dei testi, dobbiamo renderci conto che è preferibile considerarla in relazione agli interlocutori. Una formula espressa in un linguaggio del primo ordine con indicazione precisa (in un metalinguaggio adeguato) di un'interpretazione dei simboli specifici è forse priva di ambiguità per interlocutori esperti in materia, ma può risultare difficilmente interpretabile per un profano. La cooperazione e le inferenze che è lecito attendersi dai destinatari variano quindi a seconda delle persone. Un testo come il seguente, affrontato nell'ambito di un modulo di corso dedicato ai numeri interi, per alcuni anni non ha creato alcun problema di interpretazione alle matricole di Informatica.

Considerate l'equazione $3ax+35y=56$.

a) Determinate i valori interi di a per i quali l'equazione ha soluzioni intere in x, y.
b) Determinate una soluzione intera dell'equazione in corrispondenza del più piccolo fra i valori di a positivi che avete trovato nella risposta alla domanda precedente.
c) In corrispondenza dello stesso valore di a, determinate una soluzione dell'equazione diversa dalla precedente e tale che $x\geq 0$.

Fino a pochi anni fa gli studenti non avevano dubbi sul fatto che anche la risposta alla domanda c) debba essere un numero intero. Più di recente ho trovato diverse risposte di studenti che presentavano una soluzione non intera come risposta a c). Più recentemente, alcuni studenti hanno trovato l'uso del verbo 'determinare' fuorviante in quanto secondo loro andrebbe usato 'calcolare' tutte le volte che il dato in uscita è un numero, probabilmente in conseguenza ai copioni scolastici a cui sono stati esposti. Qui non è rilevante stabilire chi ha ragione e chi ha torto, o se il testo originario fosse o no accurato, ma notare che inferenze pacifiche per alcuni gruppi di matricole, non lo sono per altri.

In qualunque scambio comunicativo sono necessari dei criteri per selezionare i messaggi che vengono scambiati. In ogni situazione le affermazioni scambiate non sono caratterizzate solo dall'essere vere o false, ma anche (e soprattutto) dall'essere opportune o inopportune. Gli studiosi di pragmatica hanno proposto diverse risposte, dal principio di cooperazione di Grice a quello di rilevanza di Sperber e Wilson alle regole di cortesia studiate da diversi autori. In base al principio di cooperazione di Grice, ad esempio, ogni scambio comunicativo è un processo collaborativo, rivolto

[14] Un esempio è la semantica secondo Tarski dei linguaggi del I ordine.

a degli scopi di solito condivisi, a cui ciascuno porta il suo contributo. Grice identifica 4 massime: *quantità* (la quantità di informazione scambiata deve essere proporzionata alla situazione), *qualità* (le affermazioni scambiate devono avere un grado di verità e di affidabilità proporzionato alla situazione), *relazione* (le affermazioni scambiate devono avere una certo grado di pertinenza con l'oggetto dello scambio) e *modo* (i modi espressivi utilizzati devono essere adeguati agli scopi dello scambio). Sperber e Wilson unificano le massime di Grice in un unico principio, quello di *rilevanza*, in base al quale i messaggi scambiati devono essere il più possibile rilevanti per gli scopi dello scambio. Nel seguito di questa presentazione vedremo che alcuni registri matematici, come altri registri evoluti, spesso violano i principi di cooperazione e rilevanza.

Va anche osservato che molti scambi fra studenti e insegnanti (come un'interrogazione o un compito scritto) tendono a essere cooperativi, in modo anche ambiguo: lo studente che deve rispondere a una domanda è consapevole che l'insegnante conosce già la risposta e può essere portato ad aspettarsi un certo grado di cooperazione, che normalmente viene accordato. L'attenzione che presterà all'adeguatezza linguistica della sua risposta sarà probabilmente limitata da questa attesa. Supponiamo che uno studente sappia risolvere un problema ma formuli la risposta in modo inadeguato. Potrebbe accadere che sia lo studente, sia l'insegnante abbiano in mente la soluzione, ma che questa non venga descritta adeguatamente nella risposta dello studente, e che l'insegnante rilevi l'inadeguatezza. In questo caso, quello studente potrebbe attribuire il suo insuccesso non alle proprie carenze linguistiche ma alla scarsa cooperazione dell'insegnante.

Simmetricamente, un insegnante, davanti a un testo, scritto o orale, prodotto da uno studente, potrebbe, per motivi diversi, scegliere tra le diverse interpretazioni possibili quella più favorevole, contibuendo così involontariamente a rafforzare la convinzione di cui sopra.

Per questo è opportuno, fin dall'inizio del percorso scolastico, inventare situazioni in cui l'esigenza di produrre testi adeguati emerga dai vincoli oggettivi imposti dalla situazione comunicativa o dalle modalità di rappresentazione e non sia subita come il capriccio di una persona.

<u>Implicature</u>

Chi interpreta un messaggio normalmente suppone che questo (in quanto atto linguistico) rispetti criteri di cooperazione o rilevanza. Se qualcuno, in una conversazione, afferma che una figura è un rettangolo, nella maggior parte dei casi per il ricevente è abbastanza naturale supporre che l'affermazione sia rilevante e comunichi la quantità di informazione adeguata, e che quindi, anche se non c'è alcun riferimento esplicito a questo, la figura non sia un quadrato. Quest'ultima conclusione è un'*implicatura conversazionale*. Un'implicatura conversazionale è quella parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva dal suo contenuto proposizionale ma piuttosto dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto. Nel nostro caso, se la figura fosse un quadrato, la parola 'quadrato' sarebbe più adeguata di 'rettangolo', che è perfino più lunga. Quindi se l'emittente ha usato 'rettangolo' è lecito attendersi che ci sia un motivo, e il primo che viene in mente è che il quadrilatero non sia un quadrato.

Un'implicatura non ha il grado di certezza di una deduzione, in quanto è possibile pensare ad altre situazioni che rendono rilevante la frase citata, o anche che i principi di cooperazione o di rilevanza siano violati, il che accade spesso in matematica, dando origine a implicature improprie. Tuttavia, le implicature sono forme di inferenza che utilizziamo continuamente nei nostri processi di comunicazione. Molti di noi sono diventati esperti in contorsionismi verbali per disinnnescare implicature nei testi dei compiti scritti che propongono agli studenti. Da una frase come

> "Determinate tutte le radici dell'equazione …"

non segue logicamente che qualche radice debba esistere (l'insieme delle radici potrebbe essere vuoto). Tuttavia l'esistenza di almeno una radice è un'implicatura che molti studenti si sentono di trarre, in molti casi a ragione. L'uso del plurale ('radici') potrebbe addirittura suggerire che le radici siano più di una. Anche la versione più raffinata

> "Determinate, se ne esistono, tutte le radici dell'equazione …"

può dare origine alle stesse implicature, seppur con diversa dipendenza dal contesto: se le radici non esistessero, in molte situazioni il problema sarebbe inadeguato per gli scopi di valutazione così come sono percepiti dagli studenti. Anche questo dipende dalle persone: se un professore si divertisse a assegnare problemi le cui soluzioni sono in contraddizione con un certo insieme di implicature, molto probabilmente i suoi studenti dopo un'adeguata sperimentazione smetterebbero di applicarle, e ne applicherebbero altre.

Linguistica funzionale

La linguistica funzionale, legata al nome di M.A.K.Halliday, mette al centro le funzioni dei linguaggi rispetto alle forme. Nella mia ricerca gli strumenti della linguistica funzionale si sono rilevati decisivi perché le differenze fra il linguaggio quotidiano e quello matematico sono in molti casi riconducibili alle diverse funzioni che i linguaggi sono chiamati a esercitare, e spiegabili soltanto in termini di queste.

Halliday attribuisce ai linguaggi 3 funzioni: quella *ideazionale* (in altri orientamenti denominata logica, proposizionale, transazionale, ecc.), che riguarda l'identificazione dei riferimenti e la verità o la falsità delle affermazioni; quella *interpersonale* che riguarda i partecipanti allo scambio e le loro reciproche influenze, quella *testuale* che riguarda la costruzione dei testi. Un approccio funzionalista deve prendere in considerazione non solo singole parole o frasi, ma testi, cioè produzioni orali o scritte di estensione anche maggiore di una frase. Per analizzare i testi e studiare le funzioni dei linguaggi è necessaria un'analisi dettagliata dei *contesti* in cui i testi sono prodotti o interpretati. In ambito linguistico il contesto non è qualcosa che esiste prima del e indipendentemente dal testo, ma testi e contesti si determinano reciprocamente. Fra i vari livelli di contesto vi è il *contesto di situazione*, relativo alle circostanze specifiche (spazio, tempo, partecipanti in quanto persone, …), il *contesto di testo* (o *co-testo*), relativo altre parti del testo in esame o eventualmente ad altri testi collegati, il *contesto di cultura*, relativo ai sistemi di convinzioni e conoscenze associati ai partecipanti allo scambio.

Registro

La costruzione che collega i testi ai contesti è il *registro*, che utilizzeremo ampiamente nel corso della presentazione.

Un registro è una varietà linguistica basata sull'uso. Un registro non è soltanto un insieme di risorse linguistiche, ma è strettamente legato ai significati e al contesto. Più precisamente, è una costruzione che collega la situazione simultaneamente al *testo*, al sistema *linguistico* e al sistema sociale. La mia accezione è diversa da quella di Duval, per cui un registro è un sistema di rappresentazione semiotico, ma è conforme all'uso della linguistica anglosassone, di diversi libri di divulgazione linguistica in italiano (e.g., Altieri-Biagi, 1985; Dardano & Trifone, 1985) e alle definizioni adottate dai principali dizionari italiani (Devoto-Oli, Sabatini-Colucci). Situazioni come una chiacchierata fra amici, la stesura di un articolo scientifico o una lezione universitaria corrispondono usualmente a registri diversi, con diverse scelte riguardo a lessico, organizzazione dei testi, criteri di accettabilità degli stessi ecc.. Va precisato che un registro si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto, e quindi diversi registri sono determinati da diversi criteri di selezione fra le risorse linguistiche di un individuo.

L'idea di registro non è molto lontana da quella di *genre* dovuta a Bachtin (1986). Leckie-Tarry (1995, pp.5-15) confronta in modo approfondito le due nozioni, sostenendone la compatibilità. L'idea di registro è più orientata alle risorse linguistiche messe in gioco, mentre quella di genre è più orientata agli aspetti socio-culturali. Per questo non c'è corrispondenza 1-1 tra registri e genre: in uno stesso genre possono essere utilizzati diversi registri.

In questa presentazione ha un certo rilievo la distinzione fra registri evoluti (o colti, in inglese *literate registers*) e registri colloquiali. Anche questa distinzione è di tipo funzionale: le stesse persone possono anche usare registri evoluti in alcuni contesti e registri colloquiali in altri. I registri evoluti sono quelli utilizzati nella comunicazione scientifica, giuridica, politica, letteraria, in buona parte della narrativa, molto spesso nelle conversazioni fra persone istruite ecc.. Il fatto che un

registro sia evoluto non dipende strettamente dall'uso di modalità stilistiche sofisticate, dal far riferimento a contenuti di alto livello o dalla preparazione o dall'età dei partecipanti. Ad esempio, un gruppo di scolari di II elementare che stendono il rendiconto di un'attività comune possono benissimo usare un registro evoluto. Le caratteristiche linguistiche dei registri evoluti verranno discusse nella sezione dedicata al linguaggio matematico.
Naturalmente non è possibile dare una definizione decidibile di registro evoluto: si potranno vedere esempi di registri decisamente evoluti, e altri di registri decisamente colloquiali ma il confine resta relativo.
Anche se si parla di registri più o meno evoluti, l'ordinamento dei registri, oltre a non essere un buon ordinamento, non è nemmeno un ordinamento totale. Le proprietà che caratterizzano i registri evoluti sono diverse e ciascuna può essere presente in misura maggiore o minore. Allo stesso modo, anche se la comunicazione scritta richiede e allo stesso tempo rende possibili registri in genere più evoluti, non è detto che questi registri siano sistematicamente più evoluti di quelli adottati nella comunicazione orale.
Uno dei punti centrali di questa presentazione sarà proprio il confronto fra alcuni registri appartenenti al linguaggio matematico (che, come vedremo, sono prevalentemente registri evoluti) e i registri colloquiali, utilizzato per spiegare alcune delle difficoltà degli studenti.

Testi orali e testi scritti

Funzioni cognitive

Come osservato da Duval (2000) la differenza fra orale e scritto non riguarda soltanto l'organizzazione linguistica dei testi ma anche le loro funzioni cognitive. Un testo orale, dopo che è stato pronunciato, è accessibile, per il parlante come per chi ascolta, solo attraverso la memoria a breve termine[15]. L'espressione orale, nelle situazioni standard, non consente di riesaminare i testi già prodotti se non riproducendo degli altri testi che si ritengono identici o equivalenti. Chi riceve un testo orale, è costretto ad adeguarsi alla scansione temporale (ordine delle parole, pause ecc.) scelte dal parlante, e a interpretare le varie parti via via che si ricevono, modificando se necessario l'interpretazion. La lettura di un testo scritto è più libera, in quanto è possibile modificare l'ordine di scansione del testo e cogliere diverse caratteristiche del testo prima del completamento del processo (parole-chiave, conclusione ecc.), e rende anche possibile affrontare il testo nel suo complesso (anche in relazione al diverso funzionamento dell'occhio rispetto all'orecchio) consente spesso processi di interpretazione più selettivi.
Un testo scritto (ma molte di queste considerazioni valgono anche per le rappresentazioni figurali) consente di superare i limiti della memoria a breve e di tenere a disposizione una quantità di dati maggiore rispetto a quelli memorizzabili. Il significato di un testo può inoltre essere analizzato in relazione sia a ciò di cui si parla sia a come se ne parla. Nel primo caso l'attenzione è focalizzata sugli oggetti descritti o evocati nel testo, nel secondo sul testo stesso, in relazione ai suoi scopi. Un analisi del secondo tipo è praticabile con efficacia solo nella forma scritta. In matematica, le analisi del secondo tipo sono richieste in continuazione. Se si vogliono discutere le proprietà di un testo (ad esempio, l'enunciato di un teorema), è quasi indispensabile avere il testo in forma scritta, così come se si vogliono discutere le proprietà di una figura o di un'immagine (ad esempio, una figura geometrica o il grafico di una funzione di variabile reale), è necessario disporre di una rappresentazione grafica. In breve, la scrittura (ma anche le rappresentazioni figurali) rende disponibili le funzioni di oggettivazione e di trattamento.
Il fatto che vi siano funzioni dei linguaggi per le quali la forma scritta o grafica sono più indicate non toglie che la forma orale possa essere indispensabile per realizzare altre funzioni, né che le due

[15] Naturalmente esistono i registratori, e in alcuni casi possono essere usati come supporto ad attività di analisi dei testi prodotti (ad esempio durante le prove di uno spettacolo o un'esercitazione in lingua straniera). Possiamo però assumere che nella maggior parte delle situazioni rilevanti per l'educazione matematica non vengano abitualmente usati come supporto all'espressione orale. D'altra parte la presenza di un registratore, se nota agli interlocutori e allo stato attuale della tecnologia, impone notevoli vincoli alla comunicazione e comunque modifica sensibilmente il contesto.

forme possano integrarsi. Lo stretto legame fra l'espressione orale e il contesto spazio-temporale in cui è prodotta è un limite per certi aspetti ma una risorsa per altri. Il fatto di essere immersi nella situazione che si vuole descrivere (come quando dei bambini devono descrivere una configurazione di oggetti o la forma di un edificio) esonera dalla descrizione esatta di tutti i componenti (che possono essere indicati o descritti sommariamente, o lasciati impliciti) e consente di concentrarsi per il tempo necessario, sugli aspetti ritenuti focali. Se lo scambio procede efficacemente, l'informazione trascurata rimane in sospeso, se invece qualche interlocutore ha difficoltà di interpretazione, può chiedere precisazioni, integrare l'informazione o correggerla attraverso un processo di negoziazione, anche in base ai suoi interessi, alle informazioni che già possiede (che possono anche essere ignote al parlante), alle sue convinzioni sul tema e anche alle emozioni che prova. D'altra parte il parlante non sempre rende esplicito di primo acchito l'intero contenuto informativo che vuole comunicare. In molti casi dovrà, in via preliminare, attirare l'attenzione dell'ascoltatore, convincerlo che vale la pena di ascoltare, verificare conoscenze e convinzioni di questo in modo da adeguare il testo alla situazione. In qualche caso potrà addirittura lasciare frasi a metà, in attesa delle reazioni dell'interlocutore o degli sviluppi del proprio pensiero. Da questo punto di vista un testo troppo completo fin dall'inizio potrebbe addirittura risultare inadeguato, con informazioni inutili, che possono appesantire il testo o violare regole di cooperazione o di cortesia (ad esempio presupponendo che il ricevente ignori informazioni che invece possiede, o costringendolo a uno sforzo di comprensione troppo intenso).
L'uso delle espressioni indicali (riferimenti deittici) come tappa importante dei processi di astrazione è stato analizzato con profondità da Radford (2000). Un indicale (come l'espressione 'quello', accompagnata da un gesto della mano, e riferita a un oggetto, un disegno o anche a una parte di testo scritta in precedenza) può essere utilizzato inizialmente in modo totalmente dipendente dal contesto di situazione e venire progressivamente spogliato delle determinazioni non necessarie fino a diventare un semplice segnaposto. Quindi il contesto non è di per sé un ostacolo, ma se sfruttato adeguatamente può favorire i processi di generalizzazione e astrazione. Questo rende particolarmente produttive le situazioni di interazione orale con la disponibilità condivisa di testi scritti o immagini, in quanto diviene possibile mettere insieme i vantaggi dei due modi di rappresentazione.
L'espressione scritta non consente da sola di mettere in atto agevolmente processi di questo tipo. Essa richiede un controllo cognitivo maggiore, in quanto lo scritto, una volta completato, è direttamente accessibile da altri con scarse o nulle possibilità di negoziazione. Un testo scritto è accessibile anche a lettori che non condividono lo stesso contesto di situazione, quindi le descrizioni devono essere più precise e complete e senza troppi riferimenti deittici. Inoltre il passaggio alla forma scritta può richiedere una ristrutturazione dei significati in gioco, il che può risultare costoso sul piano cognitivo o bloccare ogni iniziativa. Duval distingue l'attività di scrittura (*écrire*) da quella di trascrizione (*transcrire*). Quest'ultima è una trasposizione modale di un testo orale che non ne modifica sostanzialmente il funzionamento cognitivo. Esistono infatti forme di rappresentazione scritta (come la stenografia, alcune forme di verbalizzazione, alcuni usi della posta elettronica) che hanno un funzionamento cognitivo più simile all'espressione orale.

Caratteristiche linguistiche

Come abbiamo appena visto, le funzioni che possono essere attribuite al linguaggio nelle varie situazioni e modalità sono molto varie. Di conseguenza anche i registri adottati sono molto diversificati. Nella comunicazione orale si può andare da una conversazione fra amici, svolta in un registro colloquiale molto lontano da quelli evoluti, a una conferenza, in un registro orale dotato di molte caratteristiche tipiche dei registri scritti (ma non tutte!). Le differenze non riguardano solo le funzioni ma anche le modalità comunicative: una conversazione fra due persone sedute l'una di fronte all'altra ha caratteristiche sia cognitive sia linguistiche diverse da una conversazione telefonica.

Anche nella comunicazione scritta le differenze di funzioni e di medium sono notevoli. Da un lato si può andare da una lista della spesa a un articolo scientifico, dagli appunti di una lezione a un romanzo pubblicato; dall'altro si può andare da testi manoscritti a testi scritti con il computer, da SMS a ipertesti. Molti insegnanti hanno sperimentato le forti differenze fra una lezione svolta utilizzando una lavagna con gesso, un proiettore di trasparenze, un proiettore da calcolatore.

In conclusione, anche se non c'è un legame rigido fra le modalità di produzione del testo e i registri adottati, si può dire che i registri evoluti sono più adatti alla modalità scritta e quelli colloquiali a quella orale, ma si possono trovare facilmente numerose eccezioni.

Linguaggio matematico

Intendo proporre una definizione ampia di linguaggio matematico. Per questo considero come appartenenti al linguaggio matematico testi verbali (orali o scritti) e rappresentazioni simboliche e figurali. In questa scelta è implicita la convinzione del fatto che le caratteristiche peculiari del linguaggio matematico non sono limitate alla componente simbolica ma mettono in gioco tutte le componenti, in particolare quella verbale. Intendo inoltre considerare tutti i registri che vengono utilizzati nel fare e comunicare matematica, a qualunque livello. A questo riguardo occorre precisare, come anche osservato da Morgan (1998, pp.1-3), che è illusorio proporsi di classificare i registri matematici in base a un insieme finito di proprietà. Una classificazione di questo tipo porterebbe probabilmente a escludere molti dei registri utilizzati da insegnanti e alunni in educazione matematica e che a noi interessano in modo particolare. Quindi per *linguaggio matematico* io intendo un sistema multimodale (che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali) e multivariato (che include un ampio spettro di registri).

Registri matematici

Con la definizione abbiamo deciso di considerare matematici un'ampia classe di registri, non necessariamente avanzati. È evidente che i registri utilizzati nel fare matematica, ad esempio, a livello di scuola elementare, presentano molte caratteristiche in comune con i registri quotidiani. Per rendere più evidenti le differenze, in questa sezione farò riferimento ai registri matematici collegati a livelli relativamente avanzati di matematica, che corrispondono grosso modo ai registri scritti, utilizzati nel fare e comunicare matematica, a partire, per fissare le idee, dalla matematica della secondaria superiore. In altre parole sono i registri che corrispondono a utilizzi abbastanza ampi della componente simbolica. Un registro matematico avanzato include tutte le componenti finora considerate: verbale, simbolica e figurale.

<u>Testi verbali ed espressioni simboliche</u>

I rapporti fra la componente verbale e quella simbolica sono complessi ed è opportuno chiarirli dall'inizio. Secondo Granger (1979) ogni scienza richiede lo sviluppo di un proprio linguaggio specifico nel quale esprimere i propri risultati. Il linguaggio verbale non è destinato a scomparire ma ad assumere prevalentemente funzioni di metalinguaggio, incorporando le funzioni illocutorie e perlocutorie (o, per dirla con Halliday, interpersonali). Tuttavia la situazione non è così semplice perché la componente verbale in moltissimi casi e per motivi diversi deve inevitabilmente svolgere funzioni di sostituto e di parafrasi di quella simbolica. Vediamo un esempio, che riguarda l'inizio di una dimostrazione del teorema di Weierstrass[16].

> Mostriamo che f è limitata superiormente (in modo analogo si dimostra per la limitazione inferiore).
>
> Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia I_n l'insieme dei punti x tali che $f(x)>n$,
>
> $$I_n = \{x \in [a,b]:\ f(x)>n\}.$$
>
> Supponiamo che $I_n \neq \emptyset$ per ogni n. L'insieme I_n è limitato inferiormente perché $x \geq a$, segue che esiste l'estremo inferiore $a_n = \inf(I_n)$. ...

In questo testo, che è simile a molti altri, compaiono espressioni interamente simboliche, espressioni verbali che esprimono proprietà matematiche (come ad esempio "f è limitata superiormente"), espressioni miste con la stessa funzione (come ad esempio "$I_n \neq \emptyset$ per ogni n") ed

[16] Naldi *et al.* (2003, p.99)

espressioni verbali con funzioni metalinguistiche (come ad esempio "Mostriamo che ...", "in modo analogo si dimostra per ...", "Supponiamo che ..."). Inoltre, alcune delle espressioni simboliche presenti, in quanto inserite nel corpo del testo, svolgono la funzione di atti linguistici (ad esempio, l'espressione "Supponiamo che $I_n \neq \emptyset$" equivale a "Supponiamo che $I_n \neq \emptyset$ sia vera"). Da queste considerazioni emerge che, in una lezione di matematica a livello di secondaria superiore o universitario, la distinzione di ruoli tra la componente simbolica e quella verbale è tutt'altro che netta. Espressioni simboliche possono assumere funzioni illocutorie, mentre il linguaggio verbale può rappresentare idee e relazioni matematiche in forma scritta o orale (anche come traduzione di espressioni simboliche) ma anche commentarle, marcarne l'organizzazione logica (ipotesi, tesi, dato, …) e quella testuale (tema, focus, coesione, …), esprimere le convinzioni del parlante sul tema (rilevanza di quanto viene comunicato, scopi, adeguatezza del messaggio rispetto a questi, …) e influenzare in modo corrispondente quelle dell'uditorio. Il fatto che la componente verbale possa surrogare quella simbolica fa sì che nei registri matematici avanzati essa venga usata prendendo quest'ultima come modello (si pensi all'uso vero-funzionale dei connettivi, anche espressi a parole, e all'uso formale di definizioni anche verbali). Per questo quando parlo delle caratteristiche linguistiche della componente simbolica, mi riferisco anche a quegli usi della componente verbale che si conformano a essa.

Questa diversità nelle funzioni svolte dalla componente verbale fa sì che, a volte in uno stesso testo, le stesse parole vengano utilizzate con significati o in base a criteri diversi. Questo accade per esempio, quando si illustra un'espressione che contiene occorrenze di un connettivo (ad esempio la 'e') la cui interpretazione è vero-funzionale (ad esempio, nella definizione dell'intersezione di due insiemi), oppure quando una voce del lessico matematico assume un diverso significato negli usi quotidiani. Vediamo un altro esempio[17].

> DEFINIZIONE L'*intersezione* dei due insiemi A e B, e si scrive $A \cap B$, è l'insieme $\{x \mid x \in A$ e $x \in B\}$.
>
> L'intersezione di A e B è così l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B. Vediamo quali sono le intersezioni degli insiemi visti sopra per illustrare l'unione. Per un qualunque insieme A, è $A \cap A = A$, e anzi se B è un sottoinsieme di A, è $A \cap B = B$.

In questo testo la congiunzione 'e', ad esempio, svolge funzioni varie. La sua prima occorrenza ha la funzione di separare i due argomenti dell'intersezione, e potrebbe essere sostituita da una virgola. La seconda ha probabilmente la funzione di coordinare una frase con la successiva (con una costruzione ardita). La terza (fra le parentesi graffe) è il connettivo logico governato dalla semantica vero-funzionale. La quarta è equivalente alla prima. La quinta serve ancora a coordinare due frasi. È da notare che l'uso di 'e' per coordinare non è governato dalla semantica vero-funzionale, in quanto, ad esempio, l'inversione dell'ordine delle frasi coordinate non lascia del tutto invariato il significato del periodo.

Non sono condivisibili le argomentazioni di chi lamenta una presunta ambiguità, o imprecisione, del linguaggio verbale. Il linguaggio verbale non è ambiguo né impreciso, ma risponde di solito ottimanente a una grande varietà di scopi, nei contesti in cui viene usato. Non è adatto alla funzione di trattamento, e infatti per questo nella storia si sono sviluppati i linguaggi simbolici.

Anche se un'analisi accurata delle funzioni delle notazioni simboliche in matematica va al di là degli scopi di questa presentazione, voglio osservare che le notazioni simboliche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica. Questo ruolo non riguarda soltanto la ricerca pura, ma anche l'impatto della matematica sulla società. Le notazioni simboliche, insieme ad altri fattori, hanno contribuito a rendere accessibili ad ampi strati dell'umanità conoscenze e tecniche matematiche che in precedenza erano riservate a ristretti circoli di sapienti. Si pensi ad esempio alla soluzione delle equazioni algebriche. È anche grazie al simbolismo dell'algebra che un'equazione di II grado è diventata accessibile a uno studente di 15 anni. Questo riguarda anche la ricerca

---

[17] Herstein (1982, p.3)

contemporanea: la disponibilità di notazioni standardizzate ampiamente condivise e la cui interpretazione non è troppo influenzata dai fattori culturali è un elemento di trasparenza e di democrazia nella ricerca.

Linguaggio matematico come gergo

Un ulteriore elemento di complessità è dato dal fatto che il linguaggio matematico, e in particolare la componente simbolica, è sottoposto ad adattamenti dettati dalle condizioni in cui è effettivamente usato ed è influenzato da esigenze diverse da quelle comunicative o di trattamento. Questo vale a maggior ragione nella scuola. Molte formule sono abbreviate per motivi pratici. Alcune abbreviazioni sono ampiamente praticate, come l'uso attributivo di predicati (frasi del tipo 'sia $x>0$' invece di 'sia x tale che $x>0$'). A queste abbreviazioni si aggiungono certi usi pedanti diffusi in alcuni testi di secondaria superiore o universitari, dove l'uso (talvolta improprio o ridicolo) di espressioni simboliche ha funzioni ancora diverse, forse legate all'esigenza di dare l'impressione che si sta facendo matematica seriamente. Inoltre tutti i matematici o gli insegnanti di matematica hanno le proprie preferenze, talvolta piccole manie, che hanno in parte giustificazioni di tipo pratico o ergonomico (come denominare i vertici di un poligono *A, B, C, D, ...* in senso orario o antiorario o chiamare $2p$ il perimetro di un poligono quando si deve lavorare col semiperimetro, o razionalizzare i denominatori, o preferire la scrittura '$a-b$' a '$-b+a$'). Si continua a ritenere che queste scelte non costituiscano degli ostacoli per gli studenti, e questo è sicuramente possibile, ammesso che costoro abbiano competenze linguistiche e metalinguistiche, e atteggiamenti verso il linguaggio tipici di chi padroneggia i registri evoluti. In caso contrario, lo studente può non essere in grado di controllare le ragioni per cui il docente sceglie una notazione piuttosto che un'altra. Non è banale spiegare a uno studente linguisticamente poco evoluto che se si usano le lettere *a, b, c* per denotare numeri interi, questo non significa che debba valere '$a < b < c$', mentre quando si usa la sequenza *A, B, C, ...* per denotare i vertici di un poligono (o un insieme di punti su una retta) l'ordine alfabetico delle lettere corrisponde di norma a un ordinamento naturale dei punti. Allo stesso modo, è probabile che la comprensione di un testo, magari scritto alla lavagna, con abbreviazioni e riferimenti ad altre parti della lavagna (se non a parti già cancellate), richieda competenza linguistica e forme di cooperazione tipici dei registri evoluti. La capacità di sintetizzare un testo lungo, che era comune fra gli studenti di diverse generazioni, è poco diffusa tra le matricole di oggi. Con questo non intendo esprimere un giudizio di merito, ma solo far notare che problemi comunicativi inesistenti quando molti di noi hanno iniziato a insegnare oggi sono diffusi e richiedono di tenerne conto in qualche modo.

In conclusione, le notazioni simboliche sono determinate in base a criteri che appartengono a livelli diversi: preferenze personali, ragioni ergonomiche più o meno esplicite o necessarie (compresa la brevità), enfasi su proprietà ritenute rilevanti (da chi opera la scelta), vincoli imposti dalla teoria. Gli studenti spesso aggiungono le loro convenzioni e abbreviazioni, come l'uso di '$\forall$' come attributo in luogo di 'qualunque', o l'omissione del simbolo di uguaglianza: '$k2$' in luogo di '$k=2$'. Questo contribuisce a rendere sempre più oscuri i legami fra il linguaggio matematico e le sue funzioni, rendendolo sempre più simile a un gergo[18], cioè a un linguaggio la cui comprensione dipende pesantemente dall'appartenenza a un gruppo.

Dopo aver messo in luce la complessità delle relazioni fra la componente verbale e quella simbolica passo a confrontare i registri matematici con gli altri registri, sulla base degli elementi messi in luce nel confronto fra registri evoluti e colloquiali.

[18] Gli usi gergali del linguaggio matematico non sono certo da incoraggiare. Tuttavia, per non essere frainteso, in attesa che dal complesso di questo seminario, e soprattutto dalla seconda parte, sia chiaro che cosa propongo di fare, anticipo che io non propongo come contromisura un maggior rigore sintattico, né la scrittura per esteso delle formule, né una 'maggior attenzione' ai significati. Si tratta piuttosto di costruire una relazione esplicita e condivisa fra le notazioni e le funzioni che sono chiamate a giocare.

Funzione prevalente

Nelle situazioni colloquiali spesso la funzione interpersonale è quella prevalente. Tutti ci troviamo continuamente in situazioni di interazione in cui lo scopo prevalente non è quello di scambiare informazioni ma quello di intrattenere relazioni interpersonali. Nei testi scritti, che possono essere letti da persone che non conoscono l'autore, o che lui non conosce, anche in tempi lontani dal tempo in cui il testo è stato prodotto, la funzione interpersonale spesso assume un ruolo più limitato e l'elaborazione e lo scambio di informazioni (la funzione ideazionale) diventa prevalente. La funzione prevalente dei registri matematici avanzati è ovviamente quella ideazionale, ma con un forte orientamento al trattamento. Questo significa che molte scelte riguardo alla rappresentazione delle idee e delle relazioni matematiche sono influenzate dall'esigenza di applicare algoritmi più che da quella di comunicare informazioni. Il passaggio dalla formula

$$x^2+y^2-2x = 0$$

alla formula equivalente

$$x^2+y^2-2x+1 = 1$$

ha la funzione non tanto di comunicare nuove informazioni, ma è legato all'esigenza di operare una trasformazione per giungere all'equazione di una circonferenza in forma normale

$$(x-1)^2+y^2 = 1$$

La prevalenza della funzione di trattamento sottolinea la funzione strumentale dei linguaggi in matematica rispetto a quella rappresentativa, e corrisponde bene alle idee di Vygotskij riprese da Radford (2000). Questo è un funzionamento tipico (ed estremo) dei registri evoluti e per questo crea molte difficoltà agli studenti che non li padroneggiano.

Stile, gerarchizzazione, iconicità

I registri colloquiali sono organizzati in base a uno stile pragmatico, organizzato su una struttura del tipo *topic-comment*. Questo significa che una conversazione non è costruita su schemi rigidamente sintattici, ma soprattutto in base alle esigenze pragmatiche di:

(i) far capire subito all'interlocutore l'argomento di cui si intende parlare;

(ii) aggiungere successivamente gli elementi (il *comment*[19]: informazioni, opinioni, …) che costituiscono il punto focale dello scambio, documentandone la rilevanza (in relazione al contesto).

Nel corso di una conversazione casuale la sintassi si piega alle esigenze pragmatiche; le frasi spesso sono semplicemente pronunciate una di seguito all'altra, e le congiunzioni eventualmente usate ('e', 'poi', …) hanno un ruolo secondario nella determinazione del significato (coordinazione debole); inoltre la percentuale di subordinate è in genere più bassa rispetto ai testi scritti. Le produzioni orali hanno un ordinamento 'naturale' dato dal tempo (i fonemi, e quindi anche i morfemi sono pronunciati in un ordine temporale), mentre quelle scritte sono ordinate spazialmente. Questi ordinamenti possono essere usati per esprimere significati iconicamente. Questo accade nei registri orali e, in modi diversi, in quelli scritti. Ad esempio i periodi

"Ho preso una pillola e mi è venuto il mal di testa"

e

"Mi è venuto il mal di testa e ho preso una pillola"

specie se pronunciati in una situazione colloquiale, hanno significati totalmente diversi. I testi non esplicitano nessuna relazione tra le due proposizioni elementari che li compongono. L'ordine in cui sono pronunciati suggerisce un corrispondente ordine temporale fra gli eventi descritti, e i criteri di rilevanza suggeriscono che si intenda suggerire che tra essi ci sia una relazione di causa-effetto. In questo caso tale relazione è espressa *iconicamente* e non esplicitata attraverso la sintassi.

[19] L'organizzazione pragmatica dei testi e la loro struttura dell'informazione è un tema molto complesso che ho tentato di semplificare. Oltre alla struttura 'topic-comment' ne sono state proposte altre, come 'tema-rema' e 'dato-nuovo'. Alcuni autori parlano anche di focus.

Nelle situazioni colloquiali la sintassi è meno importante che nei testi scritti. Anche per questo è abbastanza frequente che le regole sintattiche vengano violate (anacoluti, mancate concordanze, errata scelta dei modi o dei tempi, frasi lasciate in sospeso, …) per meglio realizzare gli obiettivi pragmatici dello scambio. Durante uno scambio parlato è possibile rendere facilmente comprensibile il testo marcandolo attraverso l'intonazione, la mimica, i gesti e anche attraverso la negoziazione progressiva dei significati, che consente di partire con un'informazione anche vaga o inaccurata e di renderla più precisa e corretta sulla base delle reazioni dell'interlocutore. Anche per questo, i registri colloquiali non necessitano di un lessico particolarmente ampio e preciso.
Lo stile dominante dei registri evoluti scritti è invece quello sintattico, basato sulla struttura *soggetto-predicato*. I significati sono governati soprattutto dalla sintassi e non ci si attiene più agli schemi pragmatici, di conseguenza l'attenzione per la correttezza è maggiore, come anche la percentuale delle subordinate. Il lessico è più ampio e molte parole hanno significati specialistici che sono definiti esplicitamente. Per marcare i testi non sono più disponibili intonazione, mimica e gesti, ma la sintassi offre altri strumenti quali la scelta fra la forma attiva, quella passiva e quella impersonale e un gran numero di parole, espressioni e costruzioni con la funzione di marcatori testuali ('cioè', 'quindi', 'insomma', 'non è così che …', …). Questi strumenti non sono gli stessi in tutte le lingue. Già fra italiano, francese e inglese si evidenziano forti differenze. Questo significa in particolare che la traduzione da una lingua all'altra può preservare una parte del significato (quella legata alla grammatica e al lessico) ma può facilmente deformare la funzione della frase (adeguatezza ecc.). Quindi la traduzione da una lingua all'altra di testi prodotti a qualunque titolo dagli studenti di qualunque livello scolare è utile solo per analisi che non tengono conto degli aspetti linguistici, o ne tengono conto solo superficialmente o per aspetti limitati alla funzione ideazionale.
Lo stile dei registri matematici avanzati è ovviamente sintattico ma, nella sua componente simbolica e nei suoi sostituti verbali, è basato sulla struttura *predicato-argomenti*. L'organizzazione del testo deve piegarsi alla funzione di trattamento e non sempre può essere utilizzata a fini comunicativi. Gran parte dei marcatori testuali del linguaggio verbale non sono più disponibili. Ne segue che nelle espressioni simboliche il significato è determinato quasi esclusivamente dalla sintassi senza molte possibilità di marcatura. Se ad esempio si conoscono le relazioni $x<y$, $x>a$ e si vuole provare $y>a$, per applicare la proprietà transitiva di '>' è necessario riscrivere i dati nella forma $y>x$, $x>a$. La scrittura $y>x$ è equivalente a $x<y$ dal punto di vista della semantica secondo Tarski, ma non da quello testuale. Le due scritture non sono congruenti semanticamente, e inoltre suggeriscono due topic diversi (y la prima, x la seconda). Se gli studenti interpretano x come il topic del testo (cioè l'argomento di cui si parla all'inizio) e se dispongono di scarsa competenza linguistica, possono essere spiazzati[20] dalla scrittura $y<x$.
I registri matematici avanzati sono altamente gerarchici, come gran parte dei registri evoluti. L'esempio immediatamente precedente illustra anche come la funzione di trattamento possa impedire l'uso iconico del simbolismo, in quanto può richiedere il passaggio a rappresentazioni non congruenti.
In sintesi, nel simbolismo matematico (e nei testi verbali che ne sono influenzati) vengono meno molte delle opportunità comunicative non solo dei registri colloquiali, ma anche di quelli evoluti in genere. La sintassi resta spesso, insieme al lessico, l'unico strumento per determinare i significati. Qualche conoscenza preliminare sugli scopi dei testi diventa quindi fondamentale.

Contesti

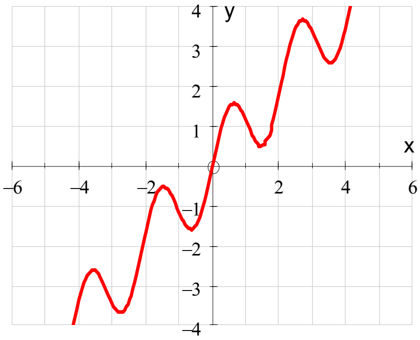
Nei registri colloquiali è dominante il ruolo del contesto di situazione; l'interpretazione dei testi richiede una qualche conoscenza di tale contesto (partecipanti, …) e l'attivazione di processi abduttivi che rendono sensati i testi (presupposizioni ecc.). Il ricorso a riferimenti deittici è ampio. Il contesto gioca un ruolo anche nella determinazione della rilevanza degli enunciati. Nei registri

[20] Questo significa che possono avere difficoltà nell'interpretarla, se viene loro proposta, ma soprattutto, che possono mancare di prenderla in considerazione, se tocca a loro ricavare il risultato.

evoluti scritti il contesto di riferimento è quello di cultura. La situazione specifica (spazio, tempo, partecipanti, …) può essere poco rilevante, se si tratta di testi (come articoli, libri ecc.) accessibili da più soggetti in tempi e luoghi diversi. La dipendenza dalla situazione è quindi minore, mentre diventano fondamentali la grammatica e le conoscenze (in qualche caso anche le convinzioni) condivise.
Nei registri matematici avanzati il ruolo del contesto è lo stesso dei registri evoluti in genere. I riferimenti al contesto di cultura possono essere abbastanza sofisticati, come quando in una dimostrazione all'interno di una teoria assiomatica o in un gioco matematico si debba prescindere dalle proprie conoscenze sulla materia e far riferimento ai soli dati esplicitamente descritti.
Molti studenti non sono abituati a usare registri evoluti e non riescono a fare a meno del contesto inteso in senso anche materiale.
Vediamo un esempio. Per affermare che l'equazione

(b) $y = x+\sin(3x)$

è l'unica di un insieme dato che può corrispondere al grafico della funzione *f* a destra, uno studente usa testualmente la frase:



> "Perciò il grafico corrispondente a *f* è l'equazione *b,* l'unica in cui x e $y > 0$ e x e $y < 0$"

Esempi di questo tipo sono frequenti. Al di là della inadeguatezza anche lessicale della frase (che è incoerente), forse lo studente intendeva riferire l'espressione 'x e $y > 0$' al lato destro del diagramma e l'espressione 'x e $y < 0$' al lato sinistro.
È anche evidente la diversità dei significati impliciti caricati sulle tre occorrenze della congiunzione 'e'. Probabilmente la prima e la terza vogliono incorporare qualche relazione logica (del tipo 'se …allora …'), mentre la seconda tenta di esprimere (in termini sintattici) il cambiamento del riferimento deittico (dal lato destro a quello sinistro del diagramma).

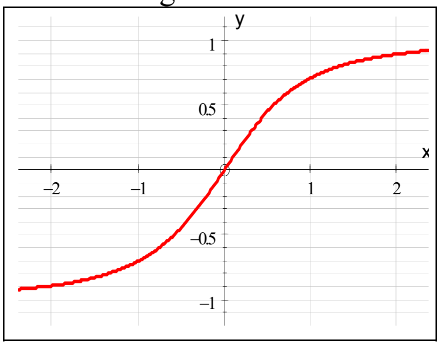
Costruzione del significato

Nei contesti colloquiali, come già detto, il significato viene costruito attraverso un processo di negoziazione fra gli interlocutori, mentre nei registri scritti questo processo è molto più difficile: un testo scritto può essere letto anche da persone che non conoscono l'autore o dal quale non sono conosciute, o comunque molto lontane dal punto di vista dello spazio, del tempo e della cultura; il lettore deve quindi ricostruire il significato sulle sole basi del testo e della propria cultura. D'altra parte, mentre un testo orale è disponibile solo nel momento in cui viene pronunciato, ed è necessario memorizzarlo (o registrarlo, o convertirlo) se si vuole prenderlo in considerazione come oggetto, un testo scritto può essere letto più volte ed è a disposizione del ricevente senza vincoli temporali. Quindi l'autore dovrà inserire nel testo tutte le informazioni che ritiene necessarie, in modo da limitare la possibilità del lettore di adottare interpretazioni incoerenti coi suoi scopi; l'impossibilità di precisare in un secondo tempo il significato e la possibilità che il testo scritto sia a disposizione di un gran numero di lettori può indurre l'autore a una maggiore prudenza e a mettere in atto strategie di controllo più raffinate. In altre parole, il testo dovrà essere accuratamente pianificato. Il lettore avrà la possibilità di innescare processi interpretativi personali, leggendo e rileggendo il testo, sottoponendo ad analisi dettagliata singole parti, sviluppando inferenze basate sulle sue conoscenze e convinzioni sul tema e sull'autore, eventualmente leggendo testi collegati.
Benché i registri evoluti siano indispensabili per lo sviluppo della conoscenza, e in particolare di quella scientifica, alcune caratteristiche dei registri colloquiali sono altrettanto fondamentali. La possibilità di rappresentare idee in forma provvisoria e modificabile, senza investire troppa attenzione sulla loro rappresentazione compatta, concentrando gli sforzi su alcuni aspetti e trascurandone altri, gioca probabilmente un ruolo centrale nello sviluppo di nuove idee. Nell'articolo (Ferrari, 2003a, riportato in allegato) sono illustrati (pp.20-24) alcuni esempi di uso inaccurato del linguaggio che può essere funzionale ai processi di pensiero.
Nella costruzione del significato i registri matematici avanzati presentano in forma spinta le caratteristiche tipiche dei registri evoluti. Il significato è presentato come un prodotto, e la

mancanza di marcatori testuali rende la sua ricostruzione più difficile che in altri registri. Si pensi ad esempio all'enunciato di un teorema così come è usualmente presentato nei libri di testo, dove il processo che ha consentito l'individuazione delle ipotesi è spesso nascosto.
È fuori di dubbio che in virtù di questa caratteristica, i registri matematici avanzati siano funzionali sia a esigenze di rappresentazione organizzata e compatta della conoscenza, sia alla funzione di trattamento. Tuttavia, se usati rigidamente, non sono funzionali ai processi di costruzione della conoscenza. Gli studenti sono spesso in difficoltà davanti all'esigenza di rappresentare la conoscenza come prodotto. L'esempio, ampiamente discusso in letteratura, delle catene di uguaglianze

$$5+3 = 8+2 = 10\cdot 4 = 40$$

è legato certamente, come notato da molti, all'uso procedurale del simbolo '=', ma corrisponde anche, al livello testuale, alla difficoltà nel rappresentare la conoscenza elaborata come sistema stabile di relazioni, al di fuori dei processi (sviluppati nel tempo) che l'hanno generata.
Un altro esempio è il seguente: durante un appello di esame, un numero notevole di studenti di Biologia e Scienze Ambientali ha usato espressioni come "è crescente e decrescente" per descrivere l'andamento del grafico a lato, che corrisponde a una funzione crescente nell'intervallo visualizzato. Il riferimento alla decrescenza è probabilmente il segnale dell'insuccesso degli studenti nell'utilizzare le convenzioni sulla lettura dei grafici e di staccarsi dal modello procedurale per cui la curva viene esplorata a partire dall'origine in entrambi i versi.



Da questo punto di vista, lo studente che parte dall'origine e osserva il grafico da destra verso sinistra lo vede in effetti decrescere. La definizione di crescenza è un'altra cosa, ed è probabilmente al di fuori della portata linguistica di molti di questi studenti. Anche qui, come nell'esempio finale del punto precedente, l'espressione 'crescente e decrescente', che è matematicamente incoerente, incorpora una variazione nel riferimento deittico, dal lato destro a quello sinistro del grafico.
Nei registri matematici avanzati, e in particolare nelle espressioni simboliche l'esigenza di pianificare è molto forte. Per questo risulta difficile procedere per successivi aggiustamenti e correzioni. Se nella costruzione di una formula si parte con il piede sbagliato, è molto frequente che non sia più possibile rimediare se non cominciando da capo. La possibilità di costruire i testi (e le conoscenze), attraverso processi di progressive correzioni, e precisazioni è invece fondamentale, ed è quello che spesso cercano di fare gli studenti.
Vediamo un esempio.
Davanti alla richiesta di trovare le soluzioni dell'equazione

$$\sin x + \cos x = 0$$

una studentessa scrive:

"Il seno e il coseno devono essere uguali ma di segno opposto".

In quanto risposta scritta, in un registro matematico, questa risposta è sbagliata. Tuttavia la frase usata è tipica dei registri colloquiali orali, nei quali è prassi normale, e spesso tollerata anche nella scuola. In tali situazioni è consentito esprimere un'affermazione falsa correggendola immediatamente dopo, o anche a richiesta. Non c'è dubbio che si tratti di una modalità comunicativa efficace e che la costruzione dei concetti debba passare anche attraverso modalità espressive di questo tipo. L'incapacità di abbandonarle può però risultare un ostacolo ai processi di apprendimento.

Lessicalizzazione e nominalizzazione

Nei registri colloquiali si usa un insieme ridotto di vocaboli. L'uso di una grande varietà di vocaboli dotati di significati specifici, tecnici, definiti con precisione è tipico dei registri evoluti e della loro esigenza di rappresentare la conoscenza come prodotto, in forma compatta e accessibile, senza che si renda necessario negoziare i significati. Questo processo si chiama *lessicalizzazione*.

Il processo di *nominalizzazione* consente di usare le diverse proprietà dei nomi rispetto ai verbi per distillare le informazioni essenziali eliminando quelle irrilevanti. Un frase verbale richiede di esplicitare informazioni che possono essere ritenute irrilevanti rispetto agli scopi comunicativi correnti, come ad esempio soggetto, modo, tempo di un verbo. Un'espressione come 'lo sfruttamento del Terzo Mondo' rappresenta un fenomeno senza prendere posizione su alcune caratteristiche che potrebbe essere necessario esplicitare in una costruzione verbale, come ad esempio l'indicazione di chi sfrutta il Terzo Mondo (con eventualmente, indicazioni sul suo genere e numero), del tempo in cui questo è avvenuto o avviene, del grado di certezza associato all'affermazione (dato di fatto, ipotesi, …). I processi di nominalizzazione corrispondono alla rappresentazione del significato come prodotto e richiedono una pianificazione maggiore e, spesso, la rinuncia alla congruenza semantica. Lessicalizzazione e nominalizzazione sono processi tipici dei registri evoluti.
La lessicalizzazione è praticata in forma spinta in molti registri matematici. La possibilità di aggiungere nuove definizioni è ampiamente usata (e talvolta abusata). Nei linguaggi del I ordine la possibilità di aggiungere nuovi simboli di costante o di funzione è un capitolo importante ed è governata da teoremi legati al nome di T.Skolem. I registri matematici avanzati utilizzano generalmente uno stile altamente nominale. Il formalismo algebrico rappresenta un caso estremo di stile nominale, in quanto esiste sostanzialmente un solo predicato (l'uguaglianza) e tutti gli altri predicati vengono espressi con l'ausilio di espressioni nominali. Il predicato 'x è pari' viene trasformato nell'affermazione che esiste un k tale che x è uguale al doppio di k. Questa caratteristica del linguaggio algebrico presenta diversi vantaggi sul piano logico e computazionale ma è uno dei principali responsabili dei fenomeni analgebrici discussi sotto la voce 'indicali'.

Coesione

È il modo in cui le diverse parti di un testo sono collegate, sia dal punto di vista grammaticale sia da quello semantico. Nei registri colloquiali orali la coesione è garantita dall'intonazione della voce, da alcune forme di marcatura testuale e dalle possibilità di negoziazione. Nei registri evoluti esistono moltissimi marcatori testuali. Nei registri matematici, e soprattutto nella componente simbolica, la coesione è scarsamente marcata. La perdita di congruenza semantica rende l'individuazione dei legami fra le parti di un testo ancora più difficile. Per molte matricole, ad esempio, non è agevole riconoscere che $x \not\leq y$ equivale a $y > x$.
Anche alcune risposte al famoso test di Wason sono interpretabili in questi termini. Ecco in breve una versione del test.
Sono dati dei cartoncini che portano una lettera stampata su un lato e un numero sull'altro. Considerate la regola "Se su un lato del cartoncino c'è una vocale, sul lato opposto c'è un numero pari". Considerate il seguente insieme di cartoncini.

$$\boxed{\text{A}} \quad \boxed{\text{B}} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5}$$

Quali cartoncini è necessario voltare per sapere se questo insieme di verifica o no la regola?
Questo test è stato utilizzato per confutare l'esistenza di una 'logica mentale'. I cartoncini da voltare sono $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{5}$. Usualmente solo una minoranza dei soggetti sottoposti al test (fra cui anche persone con buona preparazione matematica) propone la risposta 'corretta', mentre la percentuale di successo aumenta se una regola equivalente viene non più presentata come arbitraria ma inserita in un contesto che la rende sensata. Questo induce a pensare che gli umani non ragionino applicando regole formali alle diverse situazioni, ma utilizzando in modo decisivo i significati. Le due regole, quindi, sono equivalenti formalmente ma non semanticamente, e come tali vengono trattate diversamente.
Questa interpretazione, che non intendo certo mettere in discussione, ha una controparte linguistica. La risposta preferita dai soggetti linguisticamente più deboli usualmente è '$\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{4}$'. Essi probabilmente non sanno cogliere altri legami di coesione oltre a quelli esplicitamente dichiarati dalle parole 'vocale' e 'pari'. La risposta 'corretta' per loro è una stravaganza, perché viola i criteri di coesione ai quali sono abituati. Nella versione contestualizzata del test, il contesto fornisce

immancabilmente legami semantici che, oltre a rendere sensata la regola, aumentano le possibilità di cogliere legami di coesione anche con la risposta ‘corretta’.

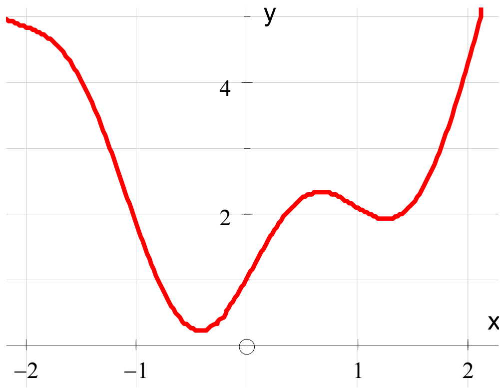
La componente figurale

Un’analisi approfondita del ruolo della componente figurale nei processi di apprendimento della matematica va al di là degli scopi di questa presentazione. Da diverse teorie sulla percezione delle immagini emerge comunque il ruolo della cultura nella percezione: in molti casi non esiste un modo naturale di interpretare un’immagine, ma il soggetto è influenzato dalle sue conoscenze e convinzioni, e anche dal contesto in cui l’immagine è percepita.

In questo capitolo voglio delineare in breve alcune caratteristiche delle rappresentazioni figurali che possono contribuire a completare il quadro del linguaggio matematico. Dagli esempi 9, 10 e 11 si è visto che le figure (intese in un senso lato che include i grafici e le visualizzazioni in genere) non sono esenti dai fenomeni studiati dalla pragmatica.

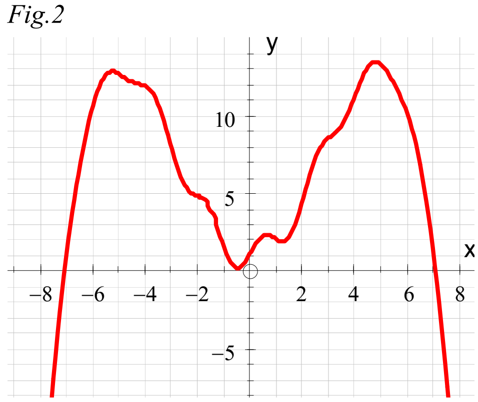
In molti casi, dato che la funzione loro riconosciuta è spesso quella di illustrazioni aggiuntive ma non indispensabili, dalle figure ci si attende che giochino un ruolo altamente cooperativo, anche in misura maggiore rispetto ai testi verbali e alle espressioni simboliche. Per questo in un grafico, ad esempio, molti studenti si attendono di trovare tutte le informazioni che servono loro, né più, né meno. Davanti a un grafico come quello riportato nella fig.1, ad esempio, in molti sono disposti a ricavare informazioni dall’ipotesi che sia adeguato a descrivere le caratteristiche di una funzione ritenute fondamentali nel contesto scolastico.

Fig.1



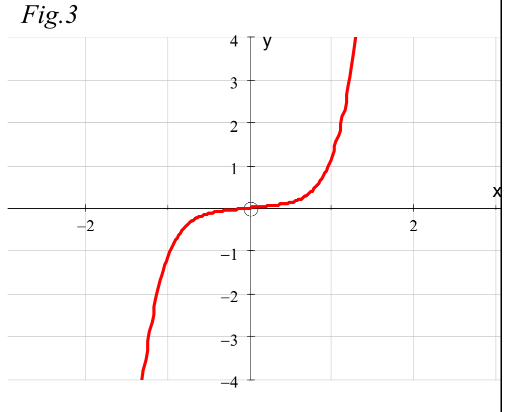
Tra queste informazioni potrebbe esserci, ad esempio, il fatto che si tratti di una funzione priva di radici reali o il cui limite per $x \to +\infty$ sia $+\infty$, e così via.

Fig.2



Anche se gli stereotipi[21] scolastici giocano indubbiamente un ruolo, resta il fatto che se il grafico di fig.1 fosse (come di fatto è) una porzione del grafico di fig.2, allora la rappresentazione di fig.1 sarebbe del tutto inadeguata e persino ingannevole. Quindi in base al principio di cooperazione è lecito attendersi che la fig.1 sia adeguata, e che quindi contenga tutte le informazioni necessarie per caratterizzare la funzione. Questa situazione non è per nulla anomala. L’interpretazione di un grafico richiede una notevole quantità di ipotesi e di inferenze per le quali non sono di solito fissati criteri precisi.

Fig.3



Possiamo ricavare, ad esempio, dal grafico di fig.3 che, detta f la funzione rappresentata, vale $f(0)=0$? Normalmente questa ipotesi è considerata legittima, anche se significa leggere nel grafico informazioni che non possono esserci: se fosse invece $f(0)=0.01$ non avremmo la possibilità di accorgercene. Quindi l’ipotesi $f(0)=0$ è il risultato di un’implicatura, e per questo è possibile immaginare dei contesti in cui tale implicatura non è più legittima, come ad esempio nel caso in cui la fig.3 fossse preceduta dalla fig.4 sotto e fosse noto che le due immagini sono frutto di due diversi ingrandimenti dello stesso grafico.

---

[21] Anche gli stereotipi, comunque, si collegano almeno in parte a inferenze.

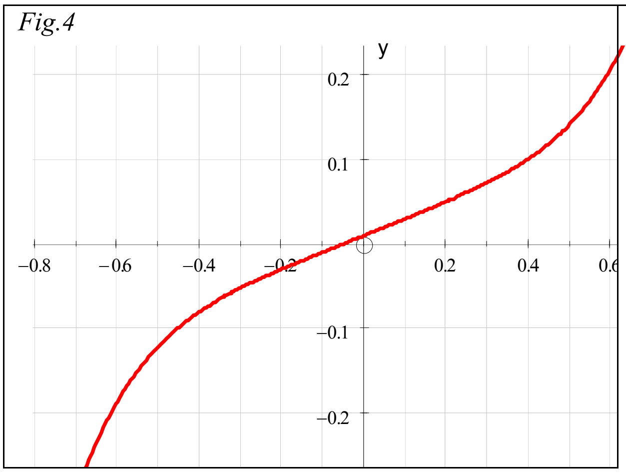


Fig.4

Considerazioni analoghe valgono per altre proprietà delle funzioni: un grafico di per sé non ci dice se una funzione è definita su un intervallo reale, se è continua, se è derivabile, e non ci consente di individuare con precisione i punti notevoli.
A questo proposito si presentano problemi analoghi a quelli che riguardano le altre componenti. Da un lato è inaccettabile che gli studenti non siano in grado di controllare criticamente le rappresentazioni grafiche e di rendersi conto che un semplice cambiamento di unità di misura può modificare profondamente la percezione di un fenomeno. Dall'altro i grafici e le altre rappresentazioni visuali vanno usati e vanno usati ampiamente nell'insegnamento, se possibile non solo come illustrazioni ma anche come ambienti per operare trattamenti che abbiano dignità non inferiore ai calcoli numerici o simbolici. Questo significa che non è necessario inseguire modelli astratti di rigore ma occorre imparare a leggere le figure, a non fermarsi alle apparenze, a ragionare su quello che ci dicono e quello che non possono dirci.

Implicazioni didattiche

Il lavoro svolto in questi anni per mettere a punto il quadro teorico e le considerazioni presentate finora hanno avuto conseguenze prima di tutto sul mio modo di comunicare con gli studenti. Mi sono reso conto che molti comportamenti tipici dei docenti universitari presuppongono negli studenti abilità e competenze tipiche di chi è abituato a utilizzare i registri evoluti. Questo vale a maggior ragione se si insegna a classi numerose. Aspetti usualmente ritenuti secondari[22], come il medium adottato (voce, microfono, gesso e lavagna, proiezione di trasparenze o da calcolatore), la qualità dei caratteri, il tempo di permanenza delle lavagnate, delle trasparenze o delle schermate hanno effetti rilevanti sull'apprendimento degli studenti, ma anche sui loro atteggiamenti. Occorre anche rendersi conto che gli studenti devono comunque operare inferenze, e per fare questo hanno bisogno di un certo grado di padronanza del contesto e di comprendere in qualche misura gli scopi dei testi a cui sono esposti. Questo problema, a livello universitario, è diventato più acuto coll'introduzione della laurea triennale, che generalmente ha richiesto agli studenti di acquisire i concetti fondamentali delle discipline in intervalli di tempo limitati, in un monte-ore limitato e con poche occasioni di riflettere sui significati di quanto appreso. In ogni caso, gli studenti sanno operare un numero molto ridotto di inferenze, e in genere solo una piccola parte di quelle che ci aspettiamo implicitamente da loro.
Ma il quadro è finalizzato soprattutto a fornire indicazioni su come promuovere le competenze linguistiche adeguate per comprendere la matematica. Da quanto visto finora è chiaro che la comprensione della matematica richiede competenze linguistiche specifiche che non si riducono alla sola componente simbolica e che i soli registri colloquiali non sono sufficienti. Inoltre, tali competenze linguistiche non sono naturali ma vanno sviluppate. Premetto inoltre che affrontando questi temi non faccio riferimento all'insegnamento universitario, ma soprattutto alla scuola primaria e secondaria.
La tecnologia sta ampliando lo spettro dei sistemi semiotici disponibili per le attività umane. Questo porta da un lato a un uso più ampio di rappresentazioni visuali a elevata iconicità (si pensi alle strutture ipertestuali, che consentono la rappresentazione iconica di nessi di natura logica, temporale o altro), dall'altro a forme di comunicazione verbale che non lasciano spazio né alla esplicitazione

[22] Questo atteggiamento, abbastanza diffuso tra i matematici, è un buon esempio di quella che Duval (1995, p.5) chiama 'la prima ipotesi', che lui rigetta e secondo la quale può esserci noesis senza semiosis, il che significa, in altri termini, che l'acquisizione dei concetti matematici non dipende dalle loro rappresentazioni.

dei significati per mezzo della sintassi né alla riflessione sui medesimi (sms, televisione). D'altra parte i metodi di insegnamento della lingua basati sullo studio di modelli grammaticali o stilistici si stanno rivelando inefficaci, sia in generale sia per quanto riguarda la matematica: anche fra gli studenti che dimostrano di possedere una discreta padronanza di lessico e grammatica solo pochi sanno utilizzarla in ambito matematico. Questo è in parte legato alla separazione tra educazione linguistica ed educazione scientifica, molto radicata nella nostra scuola e che costituisce un ostacolo grave rispetto agli obiettivi sopra enunciati. L'obiettivo principale dovrebbe essere quindi il potenziamento delle capacità metalinguistiche, cioè delle capacità di mobilitare consapevolmente le proprie risorse linguistiche per rispondere a scopi diversi e di controllare i prodotti. Si tratta quindi non di offrire nuovi modelli linguistici (in quanto più corretti di altri) ma di costruire la flessibilità nel passaggio da un sistema semiotico all'altro, da un registro verbale all'altro e di potenziare le capacità di controllo. Il coordinamento di sistemi semiotici come proposto da Duval rientra in pieno in queste finalità. Questo deve essere integrato dalla capacità di controllare le proprie risorse linguistiche, selezionando quelle più adeguate agli scopi comunicativi, in altre parole governando l'uso di registri diversi, tra i quali almeno qualcuno sufficientemente evoluto. I registri evoluti non sono tanto caratterizzati da modelli grammaticali e stilistici raffinati quanto dalla possibilità di comunicare con soggetti che non condividono lo stesso contesto di situazione, di riflettere sui testi e controllarli e di rappresentare con precisione significati complessi. Questo punto è delicato. Se da un lato la tecnologia offre possibilità di espressione impensabili nel passato, dall'altro la capacità di interpretare testi complessi, sviluppando strategie di ricostruzione del significato attraverso inferenze che mettono in gioco le conoscenze e le convinzioni del soggetto continua a essere strategica e insostituibile per lo sviluppo del pensiero. La costruzione di tale capacità richiede un certo tirocinio e tempi adeguati per riflettere sui testi. La tecnologia o le rappresentazioni visuali, da sole, non possono sostituire questa capacità, anche se possono concorrere a potenziarla. È quindi necessario che gli studenti siano in grado di usare registri evoluti quando le situazioni comunicative o operative lo richiedano.

Per potenziare le capacità metalinguistiche è necessario mettere al centro il controllo sui testi in relazione ai loro scopi. Questo urta con diverse convinzioni diffuse tra gli studenti. Come tutte quelle che discendono dalla separazione tra insegnamento linguistico e insegnamento scientifico, e, nell'ambito di quest'ultimo, fra i diversi sistemi semiotici. Si tratta quindi di sviluppare la capacità di costruire testi adeguati rispetto a scopi che devono essere evidentemente non solo noti, ma anche condivisi dagli studenti. Tutte le risorse linguistiche necessarie (sintattiche, lessicali, stilistiche, …) devono essere messe in campo in relazione a tali scopi. Per superare alcuni dei fenomeni negativi di separazione, si dovrà lavorare a lungo sulle conversioni fra di essi, con lo scopo di raggiungere il coordinamento di sistemi semiotico come descritto da Duval. La via è quella di costruire una maggiore flessibilità nell'uso dei linguaggi attraverso situazioni che forzino l'uso di strumenti linguistici non come adesione a un modello formale (grammaticale o stilistico) ma come risposta a vincoli di comunicazione e di rappresentazione espliciti e condivisi.

Si tratta quindi di costruire situazioni in cui lo sviluppo di competenze linguistiche appropriate per la matematica sia una risposta a specifici vincoli comunicativi e di rappresentazione imposti dal contesto (e non come conformità a un modello).

Riepilogo alcune caratteristiche delle situazioni comunicative che possono forzare il potenziamento del controllo metalinguistico sui testi e l'uso di registri evoluti.

1) Comunicazione con soggetti che non condividono il contesto di situazione. Questo richiede di esplicitare buona parte dei riferimenti deittici e tutte le presupposizioni che derivano, ad esempio, dal fatto di essere nello stesso luogo, di essere un gruppo stabile, di svolgere determinate attività ecc. L'attività descritta nell'allegato 1 è di questo tipo.

2) Comunicazione con soggetti che non condividono il contesto di cultura. Questo accade quando vengono a contatto bambini di fasce d'età abbastanza lontane, o bambini di etnie diverse, e richiede di esplicitare alcuni riferimenti culturali che si ritiene possano non essere condivisi. In situazioni di questo tipo il contesto di situazione può anche essere condiviso.

Un'attività di questo tipo è stata svolta in una scuola elementare di Alessandria, dove gli alunni di una classe V sono stati incaricati di progettare e gestire in laboratorio un'unità didattica di primo approccio al calcolatore rivolta a bambini di I. In quell'occasione i bambini di V hanno mostrato notevole sensibilità per le difficoltà potenziali dei piccoli, sviluppando strategie didattiche complesse e, in genere adeguate; ad esempio, hanno controllato puntigliosamente il lessico, escludendo tutte le parole che, a loro giudizio, potevano mettere in difficoltà i piccoli.

3) Traduzione da una lingua all'altra. Ad esempio, tradurre dall'inglese o dal francese un testo che esprime una storia nota, oppure una sconosciuta. In ogni caso, la situazione deve essere costruita in modo che gli alunni abbiano la possibilità di controllo semantico sul testo. Quindi devono sapere prima almeno di che cosa si tratta ecc.. Lo scopo non dovrebbe essere la traduzione scolasticamente intesa, ma la costruzione di un testo in italiano che risponda a criteri negoziati ed esplicitati in precedenza e che racconti la stessa storia di quello originale. Questa attività dovrebbe richiedere di esplicitare le informazioni eventualmente implicite nel testo originale e di riorganizzare il testo in modo da rendere il prodotto finale coeso, magari confrontando il loro prodotto con una traduzione letterale.
4) Ricostruzione di un testo (completando le parti mancanti) sulla base di alcune sue parti, di informazioni sui suoi scopi ecc.. Questa attività può essere strutturata in modi molto diversi e ha lo scopo duplice di richiedere l'interpretazione accurata dei frammenti di testo disponibili (che può anche essere non univoca) e, su questa base, la ricostruzione di un testo coeso che rispetti i vincoli imposti da tali frammenti. È evidente che la ricostruzione non è mai univoca. Un prototipo letterario di questa attività si trova nei 'Figli del capitano Grant' di Verne, dove i protagonisti trovano in una bottiglia un messaggio scritto in tre lingue e molto sciupato dalla permanenza in mare. In questo caso sono estremamente chiari gli scopi del testo (richiesta di soccorso), gli autori (naufraghi) e il tipo di informazioni che deve contenere (indicazioni geografiche sulla posizione dei naufraghi). Sono invece ambigue le informazioni lessicali, in quanto le parole sono danneggiate dell'acqua. L'intera trama del romanzo si basa sul fatto che la stessa parola viene successivamente interpretata in tre modi diversi, e che il terzo, che era quello esatto, era l'unico a non dare informazioni geografiche. Nel romanzo, il ritrovamento del capitano Grant avviene casualmente e non sulla base dell'interpretazione del messaggio.
5) Completamento di un testo dal quale sono stati eliminati alcuni dati. In questo caso lo sforzo non è tanto orientato alla riorganizzazione del testo quanto a decidere, attraverso inferenze che mettono in gioco l'interpretazione globale del testo e l'enciclopedia dei soggetti, quali dati siano compatibili (ad esempio, scegliendoli in un insieme dato). È importante che in qualche caso l'inserimento anche di un solo dato richieda di considerare il testo nel suo complesso, e che la scelta non sia eseguibile attraverso l'individuazione di parole-chiave, ma richieda inferenze. Nell'allegato 1 è discusso in breve un esempio di attività di questo tipo.
6) Ricostruzione di due testi separati a partire da un insieme di frasi mescolate. La chiave per la ricostruzione può essere lessicale (le frasi che devono andare insieme contengono parole collegate semanticamente) o anche stilistica (ad esempio, uno dei testi è scritto da un adulto, l'altro da un bambino) o altro. Lo scopo di questa attività è l'individuazione di legami di tipo diverso tra le varie frasi (attraverso l'analisi testuale) e, successivamente, l'organizzazione di due testi coesi.
7) Stesura di regolamenti per attività comuni. Ad esempio, in una classe di scuola elementare si organizzano gare a squadre di proposta e di soluzione di problemi. Una squadra deve risolvere collettivamente i problemi proposti dall'altra. La gara richiede delle regole, come ad esempio il divieto di proporre problemi senza i dati necessari o con dati contraddittori. Verbalizzare le regole è un lavoro che assomiglia all'assiomatizzazione di una classe di strutture, o alla stesura di un capitolato. Si tratta di esprimere in forma scritta delle

condizioni, in modo che il testo risultante sia comprensibile per tutti e non consenta interpretazioni diverse.

8) Conversioni fra sistemi semiotici diversi (verbale ↔ simbolico, verbale ↔ figurale, simbolico ↔ figurale, …). Queste attività sono ampiamente illustrate negli allegati 1 e 3 e possono richiedere notevoli sforzi di riorganizzazione dei testi, in relazione a scopi condivisi. Nel caso della conversione figurale → verbale è richiesto uno sforzo di esplicitare dati spaziali che è simile a quello richiesto dalle attività descritte al punto 1) di questo elenco.

9) Conversioni fra testi orali, testi scritti provvisori, testi scritti stabili. Ad esempio, scrivere gli appunti di una discussione, o la descrizione provvisoria di un'attività, o la bozza di un progetto. Convertire gli appunti in testi più stabili e coesi. Anche in questo caso tutti i testi prodotti hanno, ciascuno, scopi noti e condivisi. Nel passaggio da una discussione orale agli appunti a un testo stabile si incontrano grandi differenze di funzioni cognitive e di organizzazione del testo, con possibilità di sfumature intermedie. Tuttavia questi testi così diversi sono riconoscibili come testi prodotti in una stessa lingua, quindi in qualche misura confrontabili. Questa è la grande ricchezza del linguaggio verbale: la possibilità di esercitare funzioni e di assumere forme e strutture lontanissime fra loro conservando la possibilità di confronto fra i testi.

10) Invenzione di sistemi di segni. Nell'allegato 2 è illustrato un esempio di attività in cui un gruppo di bambini alla fine della II elementare mettono in formula la soluzione di un problema. In questo caso non si tratta di conformarsi a un modello offerto dall'esterno (la notazione standard aritmetica o algebrica) ma di inventare una notazione che risponda a scopi condivisi dai bambini. Lo scopo di attività come queste non è di portare i bambini ad ammirare la bellezza delle notazioni matematiche esistenti o a padroneggiarne i significati profondi. Si tratta invece di mettere in luce in modi diversi e situazioni diverse i collegamenti tra le funzioni dei linguaggi e le loro forme. Questo ha dei prezzi: la possibilità che i bambini operino scelte in contrasto con le notazioni standard. Questo è inevitabile se si vuole che i bambini assumano un atteggiamento adeguato nei confronti dei linguaggi. Le notazioni matematiche esistenti, anche se sono probabilmente adeguate per i loro scopi, sono tuttavia prodotti di sviluppi storici e di condizioni culturali che non possono che essere in gran parte estranee alla maggioranza degli studenti, comprese le matricole universitarie. Il sistema scolastico, l'accademia, l'editoria ecc. hanno poi aggiunto caratteristiche che corrispondono a esigenze ancora diverse, e anche di queste molte non sono condivise né condivisibili per la maggior parte degli studenti. Quindi l'adozione delle notazioni standard della matematica da parte degli studenti rischia di assomigliare più allo studio della grammatica che non all'uso mirato del linguaggio. L'uso delle notazioni matematiche non può quindi essere l'occasione di costruire i legami tra testi e scopi, perché questi ultimi sono troppo lontani o sfuggenti. La capacità di costruire tali legami deve essere quindi costruita prima, senza spaventarsi se gli studenti costruiscono notazioni diverse da quelle standard.